Høgskolen i Østfold
Avdeling for ingeniørfag

EKSAMENSOPPGAVE
Emne: IRF30014 Matematikk 3 **Lærer/telefon: Tore A. Kro,**

Grupper: Ingeniør	Dato: 07.12.2015	Tid: 0900-1300
Antall oppgavesider: 3	Antall vedleggsider: Ingen	
Sensurfrist: 06.01.2016		
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.

Oppgave 1. Finn ligningen til hyperbelen med asymptoter $y = \pm\frac{17}{8}x$ og brennpunkt $F(0, \pm 17)$. Hva er eksentrisiteten og styrelinjene til dette kjeglesnittet? Skisser hyperbelen.

Oppgave 2. Funksjonen f er definert for $x > 0$ og $0 < y < \pi$ ved

$$f(x, y, z) = y + 2z.$$

Bruk Lagrange-multiplikatorer til å finne kritiske punkt for denne funksjonen på flaten $x^2 + z^2 = 2x \sin y$.

Oppgave 3. Beskriv integrasjonsområdet ved polarkoordinater og regn ut dobbeltintegralet

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} y(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Oppgave 4. La vektorfeltet $\mathbf{F}$ i planet være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (1 - y, xy - x).$$

a) Er vektorfeltet $\mathbf{F}$ konservativt?

b) La C være kurven parameterisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ der $-1 \leq t \leq 1$. Regn ut linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

c) La D være området avgrenset av linja $y = 1$ og kurven C. La M og N være komponentene i vektorfeltet $\mathbf{F} = (M, N)$. Regn ut integralet

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathrm{d}A.$$

Hvorfor blir svarene i deloppgave b) og c) like?

Oppgave 5. En flate S ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 \leq 1$ og $0 \leq z \leq 2\pi$ og er parameterisert ved

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

a) Finn grensene for u og v.

b) Finn de deriverte $\mathbf{r}_u$ og $\mathbf{r}_v$, og regn deretter ut lengden $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u|$.

c) Finn overflatearealet av flaten S. Du kan få bruk for integrasjonsformelen

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

Oppgave 6. Finn løsningen av den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

som oppfyller randbetingelsene

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(2\pi, t) = 0$$

og initialbetingelsen

$$u(x, 0) = \sin(x) + \tfrac{1}{2}\sin(2x) + \tfrac{2}{5}\sin(\tfrac{5}{2}x).$$

Oppgave 7. Radiansen (spectral radiance) til et sort legeme er en funksjon av frekvens f og temperatur T. Plancks lov sier at

$$B_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1},$$

der $h = 6{,}62607 \cdot 10^{-34}$ Js er Plancks konstant, $c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m/s er lysfarten og $k_B = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}$ J/K. Funksjonen har et maksimum for alle endelige temperaturer.

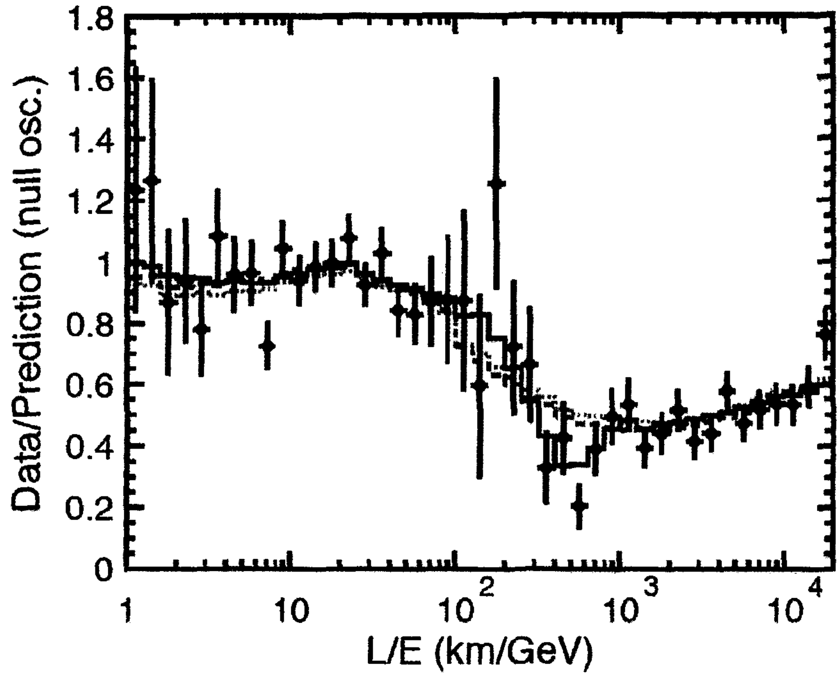
i) Vis ved regning at frekvensen som gir maksimal radians blir

$$f_{\text{maks}} = x \cdot \frac{k_B}{h} \cdot T,$$

der parameteren x er den positive løsningen til $(3 - x)e^x = 3$.

ii) Hvilken benevning har parameteren x?

Oppgave 8. Nobelprisen i fysikk for 2015 ble gitt til Takaaki Kajita og Arthur B. McDonald *for oppdagelsen av nøytrinosvingninger som fører til at nøytrinoer må ha masse.* Følgende plott demonstrerer noen av resultatene deres:



I denne oppgaven skal dere svare på noen generelle spørsmål om plottet. Ingen spesifikk kjennskap til nøytrinofysikk er nødvendig.

i) Dette er et 2-dimensjonalt plott.
Hva kalles de to ulike skalaene som brukes på aksene?

ii) I plottet har en del punkter vertikale og horisontale streker. Hva betyr de strekene?

iii) Det andre av Tuftes prinsipper sier
En god grafisk framstilling skal få den som ser på til å tenke på poenget uten å bli forstyrret av metode, grafikk, etc.
Gi en kort beskrivelse av hvordan dette plottet gjør det.

I oppgave 1
kan studentene
få bruke
asymptote $y = \pm 15/8\,x$
i stedet for det
som er oppgitt