Høgskolen i Østfold
Avdeling for ingeniørfag

**EKSAMENSOPPGAVE**
**Emne: IRF20014 Matematikk 2** **Lærer/telefon: Tore A. Kro,**

| | | |
|---|---|---|
| **Grupper: Ingeniør** | **Dato: 02.12.2015** | **Tid: 0900-1300** |
| **Antall oppgavesider: 2** | **Antall vedleggsider: 2** | |
| **Sensurfrist: 23.12.2015** | | |
| **Hjelpemidler:** **Godkjent kalkulator og Gyldendals/Aktiv formelsamling** | | |
| KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG | | |

*Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.*

**Oppgave** 1. La $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x-3)$.

a) Regn ut de partielt deriverte av første og andre orden.

b) Finn ligningen til tangentplanet i $(x_0, y_0) = (1,1)$.
*Husk at ligningen for tangentplanet er gitt ved formelen*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0).$$

c) Finn og klassifiser de kritiske punktene.
*Husk at diskriminanten er gitt ved formelen*

$$\Delta = D = AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

**Oppgave** 2. En funksjon $f$ er definert ved

$$f(x) = x^2$$

for $-\pi < x \leq \pi$. Funksjonen utvides periodisk ved $f(x + 2\pi) = f(x)$.

a) Tegn grafen for $x$ fra $-3\pi$ til $3\pi$. Er funksjonen odde, jevn eller ingen av delene? Er funksjonen kontinuerlig? Hva er perioden?

b) Finn Fourier-rekken til $f(x)$.

**Oppgave** 3.

a) Regn ut Laplace-transformasjonen

$$\mathcal{L}\left(4\sin(t + \frac{\pi}{3})\right).$$

*Hint: Du kan få bruk for den trigonometriske formelen for sinus til summen av to vinkler.*

b) Bruk Laplace-transformasjonen til å løse startverdiproblemet

$$y'' + y = 4\sin(t + \frac{\pi}{3}), \qquad \text{der } y(0) = 0 \text{ og } y'(0) = -1.$$

Du kan i denne deloppgaven få bruk for formlene

$$\mathcal{L}(t\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}(t\cos t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

c) I denne deloppgaven skal du utlede Laplace-formelen $\mathcal{L}(t\sin(t)) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$, altså den ene oppgitte formelen i deloppgave b). Oppgi hvilken regneregel for Laplace-transformasjonen du ønsker å benytte i utledningen. Forklar fremgangsmåten og vis utregningen. Det er flere mulige løsninger på denne deloppgaven.

**Oppgave** 4. La matrisen $A$ være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}.$$

a) Sjekk at $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor til $A$. Hva er den tilhørende egenverdien?

b) Om mulig finn en diagonal matrise $D$ og en inverterbar matrise $P$ slik at $A = PDP^{-1}$.

På Facebook kan man redigere profilbildet sitt for å synliggjøre et engasjement. Vi skal nå stille opp en enkel modell der $x_n$ er andelen av Facebook-brukerne som på dag $n$ har et engasjerende profilbilde, og $y_n$ er andelen Facebook-brukere med nøytralt profilbilde på dag $n$. I vår modell skal vi bruke $A$ som overgangsmatrise, og vi setter

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

c) I følge denne modellen: Hvor mange prosent av Facebook-brukerne med engasjerende profilbilde velger å skifte til et nøytralt profilbilde neste dag?

d) Hva er likevektsvektoren for systemet? I det lange løp stabiliseres fordelingen mellom engasjerende og nøytrale profilbilder. Mot hvilken prosentsats nærmer andelen Facebook-brukere med engasjerende profilbilde seg?

**Oppgave** 5.

a) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n}$$

b) Finn konvergensradius til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{3n}}{(2n-1)!} x^n.$$

*Du kan få bruk for formelen* $\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ *der* $c_n$ *er koeffisientene i potensrekken.*

c) Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

er konvergent. Bestem et antall ledd $N$ slik at feilen ved å avbryte summeringen etter $N$ ledd blir mindre enn $10^{-3}$.
*Husk at feilestimatet i integraltesten er*

$$|E_N| \leq \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

*der funksjonen* $f$ *passer med leddene i rekken,* $f(n) = a_n$.

## Derivasjonsregler

$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

## Deriverte av grunnfunksjonene

| | |
|---|---|
| $(x^r)' = rx^{r-1}$ | $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\sin x)' = \cos x$ |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$ |
| $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |

## Trigonometriske sammenhenger

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin(2\pi + x) = \sin x$

$\cos(2\pi + x) = \cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\sin mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$

$\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$

$\sin mx \sin nx = \dfrac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$

## Integrasjonsregler

$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$

$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$

$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$

$\displaystyle\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

## Tabell over nyttige integraler

$\displaystyle\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \quad r \neq -1$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$\displaystyle\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C$

$\displaystyle\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

$\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

$\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

$\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\displaystyle\int x\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a} + C$

$\displaystyle\int x\sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} + C$

$\displaystyle\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x = -\frac{2\sin ax}{a^3} + \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{x^2\sin ax}{a} + C$

$\displaystyle\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{2\cos ax}{a^3} + \frac{2x\sin ax}{a^2} - \frac{x^2\cos ax}{a} + C$

## Noen rekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1]$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{m} ax^n = a\frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$$

## Fourier-rekker

For $f$ definert for $x \in [-\pi, \pi]$ er

$$Ff(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x$$

For en periodisk funksjon $f$ med periode $T$ er

$$Ff(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right) \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{c}^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{c}^{c+T} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{c}^{c+T} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T}\,\mathrm{d}x$$

For en jevn funksjon $g$ med periode $T = 2L$ er

$$Fg(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{L} \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{\pi nx}{L}\,\mathrm{d}x$$

For en odde funksjon $h$ med periode $T = 2L$ er

$$Fh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi nx}{L} \quad \text{der}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{\pi nx}{L}\,\mathrm{d}x$$

## Regneregler for Laplace-transformasjonen

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| 2. | $f''(t)$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| 3. | $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ |
| 4. | $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| 5. | $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |
| 6. | $u(t-c)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| 7. | $f(ct)$ | $\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ |
| 8. | $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ | $F(s) \cdot G(s)$ |
| 9. | $tf(t)$ | $-F'(s)$ |
| 10. | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma$ |

## Basisformler for Laplace-transformasjonen

| | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, |
|---|---|---|
| 1. | $1$ | $\frac{1}{s}$, $s > 0$ |
| 2. | $t$ | $\frac{1}{s^2}$, $s > 0$ |
| 3. | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$ |
| 4. | $t^p$ | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$ |
| 5. | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$, $s > a$ |
| 6. | $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$, $s > 0$ |
| 7. | $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$ |
| 8. | $e^{at} \sin bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$ |
| 9. | $e^{at} \cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$ |
| 10. | $te^{at}$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$ |
| 11. | $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$ |
| 12. | $u(t-c)$ | $\frac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$ |
| 13. | $\delta(t)$ | $1$, $s > 0$ |
| 14. | $\delta(t-c)$ | $e^{-cs}$, $s > 0$ |