Høgskolen i Østfold
Avdeling for ingeniørfag

EKSAMENSOPPGAVE
Emne: IRF20012 Matematikk 2 **Lærer/telefon: Tore A. Kro**

Grupper: Ingeniør	**Dato: 02.12.2015**	**Tid: 0900-1300**
Antall oppgavesider: 2	**Antall vedleggsider: Ingen**	
Sensurfrist: 23.12.2015		
Hjelpemidler: **Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.

Oppgave 1. La $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x - 3)$.

a) Regn ut de partielt deriverte av første og andre orden.

b) Finn ligningen til tangentplanet i $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

c) Finn og klassifiser de kritiske punktene.

Oppgave 2. En funksjon f er definert ved

$$f(x) = x^2$$

for $-\pi < x \leq \pi$. Funksjonen utvides periodisk ved $f(x + 2\pi) = f(x)$.

a) Tegn grafen for x fra -3π til 3π. Er funksjonen odde, jevn eller ingen av delene? Er funksjonen kontinuerlig? Hva er perioden?

b) Finn Fourier-rekken til $f(x)$.

c) Hvorfor konvergerer Fourier-rekken mot den opprinnelige funksjonen $f(x)$ for alle x? Sett inn en passende x-verdi i Fourier-rekken og finn den eksakte verdien for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Oppgave 3.

a) Regn ut Laplace-transformasjonen

$$\mathcal{L}\left(4\sin(t + \frac{\pi}{3})\right).$$

Hint: Du kan få bruk for den trigonometriske formelen for sinus til summen av to vinkler.

b) Bruk Laplace-transformasjonen til å løse startverdiproblemet

$$y'' + y = 4\sin(t + \frac{\pi}{3}), \qquad \text{der } y(0) = 0 \text{ og } y'(0) = -1.$$

Du kan i denne deloppgaven få bruk for formlene

$$\mathcal{L}(t\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}(t\cos t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Oppgave 4. La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}.$$

a) Sjekk at $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor til A. Hva er den tilhørende egenverdien?

b) Om mulig finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

På Facebook kan man redigere profilbildet sitt for å synliggjøre et engasjement. Vi skal nå stille opp en enkel modell der x_n er andelen av Facebook-brukerne som på dag n har et engasjerende profilbilde, og y_n er andelen Facebook-brukere med nøytralt profilbilde på dag n. I vår modell skal vi bruke A som overgangsmatrise, og vi setter

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

c) I følge denne modellen: Hvor mange prosent av Facebook-brukerne med engasjerende profilbilde velger å skifte til et nøytralt profilbilde neste dag?

d) Hva er likevektsvektoren for systemet? I det lange løp stabiliseres fordelingen mellom engasjerende og nøytrale profilbilder. Mot hvilken prosentsats nærmer andelen Facebook-brukere med engasjerende profilbilde seg?

Oppgave 5.

a) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan(n)}$$

b) Finn konvergensradius til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{3n}}{(2n-1)!} x^n.$$

c) Vis at rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n(-1)^n}{2^n}$$

er konvergent. Bestem et antall ledd N slik at feilen ved å avbryte summeringen etter N ledd blir mindre enn 10^{-3}.