EKSAMENSOPPGAVE

Emne: IRF 30004 Ingeniørmatematikk 3. Lærer/telefon: EvK og KR, 69104063.

Grupper: Diverse.	**Dato: 09.12.2013.**	**Tid: 09.00 – 12.00.**
Antall oppgavesider: 2.	**Antall vedleggsider: 7, formelsamling.**	
Sensurfrist: 14.01.2013.		
Hjelpemidler: Lærebok CALCULUS (enhver forfatter), to kompendier (optimering og PDE) formelsamling i matematikk for videregående skole og kalkulator (alle typer).		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Alle delpunkter i oppgavesettet teller likt. Nødvendig mellomregning må føres.

Oppgave 1

Bestem den retningsderiverte til funksjonen $f(x,y)=x^3y^2$ i punktet $(2,-1)$ og i retning $(12,-5)$.

Oppgave 2

Deriver vektorfeltet $\underline{F}=\underline{F}(x,y,z)=\left(e^{xy},4z-3y,x^2\right)$.

Bestem den deriverte til vektorfeltet i punktet $(1,0,2)$.

Oppgave 3

a) Et vektorfelt er gitt ved $(y^2z^3, kxyz^3, 3xy^2z^2)$, der k er en konstant.

Vis at k må være 2 for at vektorfeltet skal være konservativt.

La $\underline{F}=\underline{F}(x,y,z)=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)$, dvs. vektorfeltet ovenfor med $k=2$.

Bestem en potensialfunksjon til vektorfeltet $\underline{F}$.

b) En kurve, C, er på parameterform gitt ved $\underline{r}(t)=(2t,3t^3,-t^2),\ 0\le t\le 1$.

Vektorfeltet $\underline{F}$ er det konservative vektorfeltet fra punkt **a**.

Beregn $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$.

Vi lar K være en vilkårlig kurve i rommet som starter i origo.

Når er $\int_K \underline{F}\cdot d\underline{r}=-18$?

Oppgave 4

Bestem alle punktene på flaten $z^2-1=xy$ som er nærmest origo og beregn den korteste avstanden fra flaten til origo.

Oppgave 5
Utslaget, $u = u(x,t)$, på en streng oppfyller:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = 40 + 10\cos x$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -30\cos 2x$$

Bestem utslaget $u = u(x,t)$.

Oppgave 6
Et legeme, D i første oktant, er avgrenset av koordinatplanene samt planene $y = 3$ og $x + z = 2$.

a) Beregn $\iiint_D x\,dV$.

b) Beregn divergensen til vektorfeltet $\underline{F} = \underline{F}(x,y,z) = (5x^2 + e^{yz}, 8y^2z, -8yz^2)$.
Beregn fluksen til $\underline{F}$ ut av legemet D.

Oppgave 7
Beregn arealet av flaten gitt på parameterform som $\underline{r}(u,v) = (5\cos u, 4v - 3\sin u, 3v + 4\sin u)$ når $0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2$.
Det kan bli bruk for at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Oppgave 8
Området R i xy – planet er avgrenset av de rette linjene $x = 0, y = 0$ og $3x + 2y = 6$.
Beregn $\oint_{\partial R} \underline{F} \cdot d\underline{r}$ når $\underline{F}(x,y,z) = (e^x - y^2, \sqrt{y} + x^2y + z^2e^x, xyz)$.

Formelsamling for matematiske metoder 3.

Gradient. Skalarfelt $f(x_1,\dots,x_n)$, har gradienten $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$.

Retningsderivert. Den deriverte til skalarfeltet f i punktet $\underline{a}$ og i retning $\underline{u}$ er $D_{\underline{u}}f(\underline{a})=\underline{u}\cdot\nabla f(\underline{a})=|\nabla f(\underline{a})|\cos\theta$, hvor retningsvektoren $\underline{u}$ er en enhetsvektor, og θ er vinkelen mellom gradienten og retningsvektoren.

Derivert av vektorfelt. La $\underline{F}:D_{\underline{F}}\to R^m$, $D_{\underline{F}}\subseteq R^n$ være differensierbar i $\underline{a}$. Da er den deriverte gitt ved jacobimatrisa $J_{\underline{F}}(\underline{a})=\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{a})\right], i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$

Tilstrekkelig betingelse for deriverbarhet. Hvis alle de partielt deriverte til funksjonen eksisterer i en n- ball om punktet og alle de partielt deriverte er kontinuerlige i punktet, så er funksjonen deriverbar i punktet.

Lineærisering. La f være et skalarfelt på en delmengde av R^n og differensierbar i et indre punkt $\underline{a}$. Da er $L(\underline{x})=f(\underline{a})+(\underline{x}-\underline{a})\cdot\nabla f(\underline{a})$.

Tangentlinje. Kurve på implisitt form $H(x,y)=0$. La (a,b) være et punkt på kurven. Tangentlinja i dette punktet er $\nabla H(a,b)\cdot(x-a,y-b)=0$.

Tangentplan. Flate på implisitt form $H(x,y,z)=0$. La (a,b,c) være et punkt på flaten. Tangentplanet i dette punktet er $\nabla H(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$.

Differensial. Differensialet til skallarfeltet i punktet $\underline{a}$ er $df=\nabla f(\underline{a})\cdot d\underline{x}$.

Absolutt usikkerhet. Den absolutte usikkerheten i størrelsen f i punktet $\underline{a}$ er $\Delta f(\underline{a})=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})\right|\Delta x_i$, hvor $\Delta x_i, i=1,\dots,n$ er de positive usikkerhetene i x- ene.

Relativ usikkerhet. Den relative usikkerheten til f i $\underline{a}$ er: $\frac{\Delta f(\underline{a})}{f(\underline{a})}$.

Kjerneregel. $\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial w}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, i=1,\dots,n$. Skrivemåte som samsvarer med forkortingsregelen for envariabeltilfellet. Vi skriver $\frac{\partial w}{\partial \underline{u}}=(\frac{\partial w}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial w}{\partial u_m})$ og $\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}=(\frac{\partial u_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial u_m}{\partial x_i})$. Skalarproduktet gir da $\frac{\partial w}{\partial x_i}=(\frac{\partial w}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial w}{\partial u_m})\cdot(\frac{\partial u_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial u_m}{\partial x_i})$ og skrivemåten blir da $\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial w}{\partial \underline{u}}\cdot\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}$, som svarer til envariabelskrivemåten.

Spesialtilfelle. $\frac{d}{dt}f(\underline{r}(t))=\nabla f(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t)$.

Koordinattransformasjoner, areal- og volumelement.

Merk at koorrdinattransformasjoner avbilder randa til det gamle området på randa til det nye området og omvendt. Dette gir en måte å finne ønsket transformasjon, når det er integrasjonsområdet som skal forenkles.

Fra **polare** til rektangulære: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

Fra **sylinder** til rektangulære: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, variabelen z er felles.

Fra **kule** til rektangulære: $x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\varphi$.

Fra **kule** til **sylinder**: $r = \rho\sin\varphi,\ \ z = \rho\cos\varphi$, variabelen θ er felles.

Arealelement i **rektangulære** koordinater: $dA = dx\,dy$

Arealelement i **polare** koordinater: $dA = r\,dr\,d\theta$.

Arealelement i **generelle** ***uv***- koordinater: $dA = |J(u,v)|\,du\,dv$.

Volumelement i **rektangulære** koordinater: $dV = dx\,dy\,dz$.

Volumelement i **sylinder** koordinater: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

Volumelement i **kule** koordinater: $dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

Volumelement i **generelle** ***uvw***- koordinater: $dV = |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$.

Jacobideterminanter for koordinatskifte: To variable: $x = x(u,v), y = y(u,v)$ gir

$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$. Tre variable: $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ gir

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Determinantutvikling. Orden **2**: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Orden **3**: $\begin{vmatrix} A & B & C \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - B\begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix}$.

Kryssprodukt. $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$ og $\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$. $\underline{A}\times\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$.

Skalarprodukt. $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$ og $\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$. $\underline{A}\cdot\underline{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

Middelverdi. To variable $\overline{f} = \frac{1}{a(R)} \iint_R f(x,y)\,dA$, hvor $a(R)$ er arealet av integrasjonsområdet. Tre variable $\overline{f} = \frac{1}{v(D)} \iiint_D f(x,y,z)\,dV$, hvor $v(D)$ volumet av integrasjonsområdet. For funksjon definert på en flate $\overline{f} = \frac{1}{a(\Sigma)} \iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$.

Massesenter. $\underline{x}_{CM} = (\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m})$. Her er momentene $M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dV$ og massen $m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dV$.

Treghetsmomentet om z- aksen er $I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$.

Fubinis setning for iterert integrasjon. Reduksjon av dobbelintegral til to enkeltintegraler, versjon for **y- enkelt** område: $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$.

Reduksjon av trippelintegral til et dobbelintegral og et enkeltintegral, versjon for **z-enkelt** område: $\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dA$, hvor R er projeksjonen av området D i xy- planet.

Linjeintegral.

Parametrisert kurve: $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} = (x(t), y(t), z(t))$.

Rett linje gjennom $\underline{a}$ og parallell med vektoren $\underline{u}$: $\underline{r}(t) = \underline{a} + t\underline{u}, t \in \boldsymbol{R}$.

Buedifferensial: $ds = |\underline{r}'(t)|dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.

Linjeintegral: $\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.

Arbeid/Strømning: $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_a^b F_x x' + F_y y' + F_z z' dt = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t))\cdot \underline{r}'(t)\,dt$.

Gradienten til et skalarfelt $\varphi(x,y,z)$ er: $\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})$.

Fundamentalsetning: La C være en kurve som starter i $\underline{r}_1$ og slutter i $\underline{r}_2$ og la $\underline{F} = \nabla\varphi$. Da er $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \varphi(\underline{r}_2) - \varphi(\underline{r}_1)$.

La C være en lukket kurve i xy-planet. La området i xy- planet avgrenset av kurven C være D. La vektorfeltet $\underline{F}(x,y) = (F_x(x,y),\ F_y(x,y))$ være gitt på D. La $\underline{T}$ være enhetstangentvektoren til kurven C i positiv omløpsretning og la $\underline{n}$ være enhetsnormalvektoren til kurven C rettet ut av området D.

Sirkulasjonen til vektorfeltet $\underline{F}$ rundt kurven C er:

$$\Gamma_C = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \oint_C \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \oint_C F_x dx + F_y dy = \int_a^b F_x x' + F_y y' dt .$$

Fluksen til vektorfeltet $\underline{F}$ ut av området D er:

$$\Phi_C = \oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\ ds = \oint_C F_x dy - F_y dx = \int_a^b F_x y' - F_y x' dt .$$

Greens sirkulasjonssetning:

$$\Gamma_C = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_D \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{k}\, dA = \iint_D \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\, dA .$$

Greens flukssetning: $\Phi_C = \oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\, ds = \iint_D \nabla \cdot \underline{F}\ dA = \iint_D \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\, dA .$

Flateintegral.

Integralet over flaten, Σ , av skalarfeltet f er $\iint_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma$.

Fluksen gjennom flaten, Σ , og i retning $\underline{n}$ av vektorfeltet $\underline{F}$ er: $\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma$.

Implisitt form. Σ er gitt ved $H(x,y,z) = 0$.

Normalvektor: $\underline{n} = \pm \dfrac{\nabla H}{|\nabla H|}$.

Flateelement: $d\sigma = \dfrac{|\nabla H|}{\left|\frac{\partial H}{\partial x_{\bar{A}}}\right|} dA$, hvor $x_{\bar{A}}$ er den variabelen som ikke forekommer i dA.

Parameterform. Σ er gitt ved $\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k}$.

Normalvektor: $\underline{n} = \pm \dfrac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}$.

Flateelement: $d\sigma = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\, dA$, $dA = dudv = dvdu$.

Divergensen til $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ er: $\nabla \cdot \underline{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$.

Curlen til $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ er: $\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$.

Merk at for vektorfelter med to komponenter og som kun avhenger av to variable brukes formlene uten z- variabelen og med z- komponenten lik null.

Stokes setning:

$$\Gamma_{\partial\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma .$$

Divergenssetningen:

$$\Phi_{\partial D} = \iint_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \iiint_{D} \nabla \cdot \underline{F}\, dV .$$

Ekstremalpunkter. Hvis $\underline{a}$ er et lokalt ekstremalpunkt til funksjonen f, så er den deriverte til funksjonen null i punktet, dvs. $\nabla f(\underline{a}) = \underline{0}$. Lokale ekstremalpunkter til en deriverbar funksjon på en åpen mengde bestemmes ved å løse vektorlikningen $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$. Løsningene er funksjonens stasjonære punkter.

Determinantkriterium for å klassifisere funksjonens stasjonære punkter. Hesse – matrisa består av alle 2. ordens partielt deriverte til funksjonen , og er $H(\underline{a}) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) \right]$, hvor $i = 1, \ldots, n$ angir radnummer og $j = 1, \ldots, n$ angir kolonnenummer. La $|H_{rr}(\underline{a})|$ være $r \times r$ underdeterminanten til hesse- matrisa (i det stasjonære punktet) som framkommer ved å stryke de $n-r$ siste radene og de $n-r$ siste kolonnene i hesse- matrisa. Det stasjonære punktet $\underline{a}$ (dvs. $\nabla f(\underline{a}) = \underline{0}$) er da et

1) lokalt **minimum** hvis $(-1)^r |H_{rr}(\underline{a})| > 0, r = 1, \ldots, n$.
2) lokalt **maksimum** hvis $|H_{rr}(\underline{a})| > 0, r = 1, \ldots, n$.
3) **sadelpunkt** hvis $|H(\underline{a})| \neq 0$ og verken 1) eller 2) holder.
4) Testen gir **ingen** konklusjon hvis $|H(\underline{a})| = 0$.

Ekstremalpunkter med føringer. La $\underline{a}$ være et ekstremalpunkt til funksjonen f på flaten S gitt ved føringene $H_1(\underline{x}) = 0 \wedge \ldots \wedge H_m(\underline{x}) = 0$. Hvis alle føringsfunksjonene ($H_i(\underline{x}), i = 1, \ldots, m$) er deriverbare i en n- ball om $\underline{a}$ og $\nabla H_1(\underline{a}), \ldots, \nabla H_m(\underline{a})$ er lineært uavhengige så finnes reelle tall $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ med $\nabla f(\underline{a}) = \lambda_1 \nabla H_1(\underline{a}) + \ldots + \lambda_m \nabla H_m(\underline{a})$. Ekstremalpunktene til funksjonen på flata finnes som løsninger til vektorlikningen $\nabla f(\underline{x}) = \lambda_1 \nabla H_1(\underline{x}) + \ldots + \lambda_m \nabla H_m(\underline{x})$.

Partielle differensiallikninger.

Varmeledningsproblemene.

1) Begge endepunktene har fast temperatur 0.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \wedge T(0,t) = T(L,t) = 0 \wedge T(x,0) = h(x).$$

Løsning: $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, hvor $h_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$.

2) Venstre endepunkt har fast temperatur 0 og høyre endepunkt er varmeisolert.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \wedge T(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \wedge T(x,0) = h(x).$$

Løsning: $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-k(\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2 t} \sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$, hvor $h_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)\,dx$.

3) Venstre endepunkt er varmeisolert og høyre endepunkt har fast temperatur 0.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = T(L,t) = 0 \wedge T(x,0) = h(x).$$

Løsning: $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-k(\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2 t} \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$, hvor $h_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)\,dx$.

4) Begge endepunktene er varmeisolerte.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \wedge T(x,0) = h(x).$$

Løsning: $T(x,t) = \frac{1}{2}h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$, hvor $h_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$.

Bølgeproblemene.

1) Begge endepunktene er faste.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge u(0,t) = u(L,t) = 0 \wedge u(x,0) = g(x) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x).$$

Løsning: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n \cos(\frac{n\pi c}{L} t) + \frac{L}{n\pi c} h_n \sin(\frac{n\pi c}{L} t)\} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$, hvor

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x)\, dx \text{ og } h_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x)\, dx.$$

2) Venstre endepunkt er fast og høyre endepunkt er vertikalt fritt.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \wedge u(x,0) = g(x) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x).$$

Løsning: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n \cos(\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t) + \frac{2L}{(2n-1)\pi c} h_n \sin(\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t)\} \sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)$, hvor

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)\, dx \text{ og } h_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)\, dx.$$

3) Venstre endepunkt er vertikalt fritt og høyre endepunkt er fast.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(L,t) = 0 \wedge u(x,0) = g(x) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x).$$

Løsning: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n \cos(\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t) + \frac{2L}{(2n-1)\pi c} h_n \sin(\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t)\} \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)$, hvor

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)\, dx \text{ og } h_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x)\, dx.$$

4) Begge endepunktene er vertikalt frie.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \wedge u(x,0) = g(x) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x).$$

Løsning: $u(x,t) = \frac{1}{2}(g_0 + h_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n \cos(\frac{n\pi c}{L} t) + \frac{L}{n\pi c} h_n \sin(\frac{n\pi c}{L} t)\} \cos(\frac{n\pi}{L} x)$, hvor

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x)\, dx \text{ og } h_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x)\, dx.$$

Merk at summasjonen starter med 1 i alle tilfellene (både varme og bølge), og at tilfelle **4** (både varme og bølge) har ekstra ledd i tillegg til rekka. Merk også at fourierkoeffisientene g_n og h_n leses direkte fra fourierrekkene hvis disse er kjente.