13/19

Høgskolen i Østfold
Avdeling for ingeniørfag

EKSAMENSOPPGAVE
Emne: IRF20012 Matematikk 2 **Lærer/telefon: Tore A. Kro, 900 22 321**

Grupper: Ingeniør	**Dato: 05.12.2013**	**Tid: 0900-1300**
Antall oppgavesider: 2	**Antall vedleggsider: Ingen**	
Sensurfrist: 08.01.2014		
Hjelpemidler: **Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.

Oppgave 1.

a) Regn ut Laplace-transformasjonen

$$\mathcal{L}\left(e^{-3t} + te^{-2t}\right).$$

b) Regn ut invers Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s(s+2)(s+3)}e^{-s}\right).$$

c) Bruk Laplace-transformasjonen til å løse startverdiproblemet

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t} - 6u(t-1), \qquad \text{der } y(0) = 1 \text{ og } y'(0) = -2.$$

Du vil få bruk for svarene fra deloppgave a) og b).

Oppgave 2. La $f(x,y) = y^3 - x^2 - 6xy + 15y$.

a) Regn ut de første og andre ordens partielt deriverte til $f(x,y)$.

b) Finn og klassifiser de kritiske punktene til $f(x,y)$.

Oppgave 3. En funksjon er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{for } -2 < x < 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{for } 0 < x < 2, \end{cases}$$

og utvidet til en periodisk funksjon ved $f(x+4) = f(x)$.

a) Tegn grafen $y = f(x)$ for x fra -6 til 6. Er funksjonen odde eller jevn, og hva er perioden?

b) Vis at Fourier-rekken til $f(x)$ er

$$Ff(x) = \sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{2} + \ldots$$

Oppgave 4.

a) Finn egenverdiene og egenvektorer til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Finn den løsningen til det dynamiske systemet

$$\vec{y}_{n+1} = A\vec{y}_n,$$

som oppfyller startbetingelsen $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) La s være en parameter. Sjekk at

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

er egenvektorer til matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(s^2-1) & s \\ s & \frac{1}{2}(s^2-1) \end{pmatrix}.$$

La $\vec{y}_n$ være den løsningen av det dynamiske systemet $\vec{y}_{n+1} = M\vec{y}_n$ som oppfyller startbetingelsen $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. For hvilke verdier av s eksisterer grensen $\lim_{n\to\infty} \vec{y}_n$?

Oppgave 5.

a) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{(n+1)^2}$$

b) Finn konvergensradius til potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n} x^n.$$

c) Bruk forholdstesten for å vise at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}$$

konvergerer. Bestem et antall ledd N slik at feilen ved å avbryte summeringen etter N ledd blir mindre enn $0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Beregn summen av rekken avrundet til 2 desimaler.