Finansteori (SFB30820), Høsten 2023

Emnekode: SFB30820

Eksamensdato: 13.12.2023

Tidspunkt: 09:00 (4-timer)

Målform: Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kursansvarlig: Jørn I. Halvorsen (41611857)

Generell informasjon: Eksamen består av fem oppgaver. Det er mulig å svare fullstendig på alle spørsmålene gjennom forholdsvise korte og poengterte svar. Formelsamling er vedlagt som appendiks. For kalkulatorutregninger bør man benytte *fire* desimaler for prosent og andeler, men for beløp i kroner tilstrekkelig med *to* desimaler .

Oppgave 1: Generell forståelse (25 prosent)

1. Forklar tilknyttet en bedrift hva som utgjør hovedforskjellen mellom et finansierings- og investeringsprosjekt?
2. Hva forteller det oss om risikoen til et prosjekt dersom vi kan fastsette at β (betaverdien) til prosjektet er (i) lik null, (ii) mellom 0 og 1 og (iii) større enn en?
3. Kapitalverdimodellen sier at alle investorer vil ha samme aksjeportefølje som er lik den verdiveide markedsporteføljen. Hvilken faktor tror du i virkeligheten kan føre til at investorer velger aksjeporteføljer på en annen måte?
4. Hva forteller aksjeloven oss om nåværende aksjonærers rettigheter ved en aksjemisjon, og hvordan blir denne rettigheten satt i verks i praksis?
5. Beskriv to imperfeksjoner, der den ene, når den ses isolert, bidrar til å øke selskapets verdi ved å øke gjeldsgraden, mens den andre fører til en nedgang.
6. Beskriv et eksempel der dividendepolitikken kan bidra til å øke eierens verdi.
7. Gi et eksempel som illustrerer hvordan fleksibilitet i forbindelse for et investeringsprosjekt med opsjonsmuligheter kan bidra til å øke den forventede nåverdien til prosjektet.

Oppgave 2: Porteføljeteori (20 prosent)

Du er nå porteføljeanalytiker hos Portefølje-ABC AS. På første dagen på jobben blir du presentert for en scenarioanalyse for tre børsnoterte selskaper

Selskap	Tilstand 1	Tilstand 2
A	0.25	-0.10
B	0.03	0.08
C	0.15	0.03

I tillegg er du blitt gitt følgende tabell om kovariansen (samvariasjonen) mellom de tre selskapene

	A	B	C
A	0.0306	-0.0044	0.0105
B	-0.0044	0.0006	-0.0015
C	0.0105	-0.0015	0.0036

Vi antar at sannsynligheten for tilstand 1 er lik 0.5, mens sannsynligheten for tilstand 2 er lik 0.5.

a. Først blir du bedt om å vise ved utregning forventet avkastning, varians og standardavvik for hvert enkelt av de tre selskapene

b. I porteføljen *To selskaper* blir bedt om å investere like stor andel i selskapene A, B. Hva blir den forventede avkastningen, variansen og standardavviket for porteføljen.

c. I porteføljen *Tre selskaper* blir bedt om å investere like stor andel i selskapene A, B og C. Hva blir den forventede avkastningen, variansen og standardavviket for porteføljen.

d. Ledelsen spør om det er en god idé å legge til flere børsnoterte selskaper i porteføljen, i tillegg til de tre som allerede er der, og om vi bør som før investere like mye i hvert selskap. Hvilket svar vil du gi til disse to spørsmålene?

Oppgave 3: Kaptialverdimodellen (20 prosent)

Mindware Technologies er et selskap innenfor kunstig intelligens. Aksjens beta, basert på to år med data, estimert slik at $\beta_E = 3.25$, mens gjeldsbetaen er beregnet slik at $\beta_G = 0.25$. Den nominelle risikofrie renten er på 4 prosent, mens meravkstningen i markedet forventes å være 16 prosent og selskapets skattesats er lik 20 prosent.

Totalt sett har Mindware Technologies 600 aksjer utestående hvor dagens markedspris er lik 300. Det gir en markedsverdi på egenkapital som blir $= 600 \cdot 300 =$ 180000

Fra årsapporten har vi videre at:

FINANSIERING	BELØP
Innskutt egenkapital	106600
Opptjent egenkapital	287900
Minoritetsinteresser	16000
Gjeld	321200
Totalt	731700

1. Beregne vektene (markedsverdi) for egenkapital og gjeld.
2. Finn kapitalkostnaden tilhørende egenkapitalen.
3. Finn kapitalkostnaden tilhørende gjelden.
4. Basert på opplysningene ovenfor, beregn totalkapitalkostnaden for selskapet.
5. Nevn to typer av finansieringsrisiko som eieren av dette selskapet er utsatt for, og forklar videre hvilken av de to som kan knyttes til verdien på gjeldsbeta.

Oppgave 4: Null-kupong obligasjoner og terminrenter (15 prosent)

Rentens terminstruktur

Vi har blitt gitt følgende opplysninger fra markedet om null-kupong-obligasjoner 1,2 og 3 år fram i tid.

Forfall	Markedsverdi	Effektive rente	Pålyende
2024	241	?	250
2025	235	?	250
2026	222	?	250

Fra læreboka har vi at termin-/forwardrenten for periode t er bestemt ved

$$ {}_{t-1}f_t = \frac{(1 +_0 r_t)^t}{(1 +_0 r_{t-1})^{t-1}} - 1 $$

1. Hva forteller dette uttrykket oss, og hvilken sentral forutsetning ligger til grunn for at dette uttrykket holder ved likhet?
2. Basert på opplysningene i tabellen, beregn terminrenten (forwardrenten) for 1, 2 og 3 år framover i tid.

Oppgave 5: Opsjoner (20 prosent)

Intuisjon

a. Vis ved en figur og forklar innholdet i følgende uttrykk knyttet til kontantstrøm ved forfall (t = T) for en kjøps- og salgsopsjon:

$$K_T = \max[0, (A_T - I)]$$

$$S_T = \max[0, (I - A_T)]$$

b. Vis ved en figur at to parvise kombinasjoner bestående av aksjer, obligasjoner, og kjøps- og salgsopsjoner vil gi samme kontantsrøm på innløsningstidspunktet.

c. Hva skjer med verdien til en kjøps- og salgsopsjon tilknyttet en aksje dersom både tiden til forfall og usikkerheten øker?

Opsjonsmodeller

Binomisk vs. Black-Scholes-modellen

1. Av de fem faktorene som bestemmer verdien til en opsjon før forfall, hvilke to faktorer er inkludert i Black-Scholes-modellen, men ikke i den binomiske opsjonsprismodellen?

Black-Scholes-modellen

Vi ønsker å bestemme kjøpsverdien til en opsjon. Vi har at risikofri rente er lik 4 prosent, 182.5 dager (ca. halvveis) til forfall, og at $A_0 = 168$ mens $I = 170$.

For kjøpsverdien til en opsjon er det ved bruk av programvare beregnet at

- $N(d_1 = 0.05) = 0.5199$
- $N(d_2 = 0.02) = 0.508$
- $e^{0.02} = 1.0202$

1. Vis ved bruk av Black-Scholes-modellen hva som er opsjonens kjøpsverdi?

2. Hva blir opsjonens sikringsforhold?

3. Basert på opplysningene nå har til nå, forklar og vis hvorfor det er mulig å finne verdien til en tilhørende salgsopsjon.

Appendiks: Formelsamling

Nåverdiberegninger med og uten usikkerhet

Uten usikkerhet

Nåverdikriteriet

$$NV = \sum_{t=0}^{T} \frac{X_t}{(1+k)^t} = X_0 + \frac{X_1}{(1+k)^1} + \frac{X_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{X_T}{(1+k)^T}$$

Med usikkerhet/risiko

Risikojustert-rente-metoden (RJ-metoden)

$$NV = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(X_t)}{(1+k)^t} = E(X_0) + \frac{E(X_1)}{(1+k)^1} + \frac{E(X_2)}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{E(X_T)}{(1+k)^T}$$

$$\text{k} = \text{risikofri rente} + \text{risikopremie}$$

Forventet kontantstrøm

$$E(X) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)X(s) = Pr(1)X(1) + Pr(2)X(2) + \ldots + Pr(S)X(S)$$

Porteføljeavkastning

Selve porteføljeavkastningen (rp) uten skatt er gitt ved

$r_p = \frac{P_T + Div_{0,T} - P_0}{P_0}$

Metode 1: Forventet avkastning

$$E(r_p) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)X(s) = Pr(1)X(1) + Pr(2)X(2) + \ldots + Pr(S)X(S)$$

Metode 2: Forventet avkastning

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(X_i) = w_1 E(X_1) + w_2 E(X_2) + \ldots + w_N E(X_N)$$

Måling av risiko

Metode 1 for måling av risiko (1-n investeringsobjekter)

- Varians

$$Var(X) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[X(s) - E(X)]^2 =$$
$$Pr(1)[X(1) - E(X)]^2 + Pr(2)[X(2) - E(X)]^2 + \ldots +$$
$$Pr(S)[X(S) - E(X)]^2$$

- Standardavvik

$$Std(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Metode 2 for måling av risiko (2 investeringsobjekter)

- Varians

$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Kov(r_1, r_2)$$

Hvor samvariasjonen er gitt ved

$$Kov(r_1, r_2) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[r_1(s) - E(r_1)][r_2(s) - E(r_2)]$$
$$Pr(1)[r_1(1) - E(r_1)][r_2(1) - E(r_2)] +$$
$$Pr(2)[r_1(2) - E(r_1)][r_2(2) - E(r_2)] + \ldots +$$
$$Pr(S)[r_1(S) - E(r_1)][r_2(S) - E(r_2)]$$

- Standardavviket

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)}$$

Korrelasjonskoeffisienten (standardisert mål på samvariasjon)

$$Korr(r_a, r_b) = \frac{Kov(r_a, r_b)}{Std(r_a)Std(r_b)}$$

- $Korr(r_a, r_b) = 1$ (fullstendig avhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = 0$ (uavhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = -1$ (fullstendig motsatt avhengige)

$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Korr(r_a, r_b) Std(r_a) Std(r_b)$$

Måling av risiko (portefølje fra 3 til n fonds)

Metode 2 for måling av risiko (3 investeringsobjekter)

Porteføljens varians er gitt ved

$$Var(r_p) = w_a^2 Var(r_a) + w_b^2 Var(r_b) + w_c^2 Var(r_c) +$$
$$2w_a w_b Std(a)Std(b)Korr(a,b) +$$
$$2w_a w_c Std(a)Std(c)Korr(a,c) +$$
$$2w_b w_c Std(b)Std(c)Korr(b,c)$$

Mens standardavviket (som tidligere) framkommer som

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)}$$

Metode 2 for måling av risiko (generell metode med n investeringsobjekter)

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \ldots + w_N E(r_N)$$

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Kov(i,j) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Std(i)Std(j)Korr(i,j)$$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)}$$

Betaverdien til en aksje eller et prosjekt

$$\beta_j = \frac{Kov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$$

$$\beta_j = \frac{Korr(r_j, r_m)Std(r_j)}{Std(r_m)}$$

Utledning av kapitalmarkedslinjen (n=2, kombinasjon av risikofri investering og markedsporteføljen M

$$E(r_p) = wr_f + (1-w)E(r_m)$$

$$Var(r_p) = (1-w)^2 Var(r_m)$$

$$Std(r_p) = (1-w)Std(r_m)$$

Kapitalkostnad for egenkapital og gjeld

- Kapitalkostnad for egenkapital

$$k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$$

- Kapitalkostnad for gjeld

$$k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$$

- Totalkapitalkostnaden (gjennomsnittskostnaden) for egenkapital og gjeld

$$k_T = k_E \underbrace{\frac{E}{E+G}}_{=w_E} + k_G(1-s)\underbrace{\frac{G}{E+G}}_{=w_G}$$

$$k_T = k_E w_E + k_G(1-s)w_G$$

$$w_E = \frac{E}{E+G}$$
$$w_G = \frac{G}{E+G}$$

Beregning av obligasjonspris

- Ordinær obligasjon (dvs. med periodevise utbetalinger)

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^t} + \frac{M}{(1+r/n)^T} =$$
$$\frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^1} + \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^2} + \ldots + \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^T} + \frac{M}{(1+r/n)^T}$$

- Null-kupong obligasjoner (dvs. uten periodevise utbetalinger)

$$P_0 = \frac{M}{(1+r)^T}$$

Forventningshypotesen

Som forteller oss at termin-/forwardrenten for periode t er bestemt ved

$${}_{t-1}f_t = \frac{(1 +_0 r_t)^t}{(1 +_0 r_{t-1})^{t-1}} - 1$$

- **Beregning av inflasjonsforventningene**

$${}_{t-1}f_t^R = \frac{{}_{t-1}f_t^N -_{t-1} j_t}{1 +_{t-i} j_t}$$

Tegningsrettigheter

- **Beregning av tegningsrettigheter:**

Rights-on-kursen (P_0) og emisjonskursen (P_e)

$$P_x = \frac{n}{n+m}P_0 + \frac{m}{n+m}P_e = \frac{nP_0 + mP_e}{n+m}$$

$$T_n = \left(\frac{nP_0 + mP_e}{n+m} - P_e\right)\frac{1}{1/N} = \frac{P_o - P_e}{N+1}$$

Gjeldsgrad og risiko

1. Gjeldsandel: (mellom 0 og 1)

$$G/(G+E)$$

2. Gjeldsgrad (mellom 0 og ∞)

$$G/E$$

Formelt (uten skatt, men med konkursrisiko)

- Systematisk investeringsrisiko

$$\beta_I = w_E\beta_E + w_G\beta_G$$

Hvor $w_E = \frac{E}{E+G}$ og $w_G = \frac{G}{E+G}$.

$$\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(\frac{G}{E})$$

- Uten konkursrisiko ($\beta_G = 0$)

$$\beta_E = \beta_I(1 + \frac{G}{E})$$

Miller & Modigliani (M&M)

$$k_G = \frac{r \cdot PG}{G}$$

$$k_E = \frac{E(OER)}{E}$$

$$k_T = \frac{E(OFR)}{V}$$

- **M&M-1:**

$$V = \frac{E(OFR)}{k_T} = \frac{E(OFR)}{k_U}$$

- **M&M-2:**

$$k_E = k_T + (k_T - k_G)\frac{G}{E} = k_U + (k_U - k_G)\frac{G}{E}$$

Ettledsbeskatning

Selskapsskatt og kontantstrøm

$$KE + KK = O + rPG$$
$$KE + KK = (OFRS - rPG)(1 - s) + rPG$$
$$KE + KK = (OFRS)(1 - s) + rPGs$$

Selskapsskatt og verdi

$$KE + KK = OFRS(1 - s) + rPGs$$

$$V_U = \frac{E(OFRS)(1 - s)}{k_U}$$

$$V(\text{Renteskattegevinst}) = \frac{srPG}{r} = sPG$$

$$\begin{aligned} V_M &= V_U + V(\text{Renteskattegevinst}) \\ &= V_U + sPG \\ &= \frac{E(OFRS)(1 - s)}{k_U} + sPG \end{aligned}$$

Miller og Modigliani med skatt

- **M&MSkatt-1**

$$\begin{aligned} V_M &= V_U + V(\text{Renteskattegevinst}) \\ &= \frac{(OFRS)(1 - s)}{k_U} + PGs \\ &= V_u + PGs \end{aligned}$$

- **M&MSkatt-2**

$$k_E = k_U + (k_U - k_G)(1 - s)\frac{G}{E}$$

Toleddsbeskatning

$$n^* = (1 - s_K) - (1 - s_S)(1 - s_E)$$

Kapitalverdimodellen med beskatning

Ingen skatt

1. $k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$
2. $k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)\frac{G}{E}$

Ettledsskatt

1. $k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$
2. $k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G(1-s)$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(1-s)\frac{G}{E}$

Toleddsskatt med Miller-likevekt

1. $k_E = r_f(1-s) + \beta_E[E(r_m) - r_f(1-s)]$
2. $k_G = r_f(1-s) + \beta_G[E(r_m) - r_f(1-s)]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G(1-s)$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(1-s)\frac{G}{E}$

Lintner-modellen

$$DPA_t = DPA_{t-1} + a[b(OPA_t) - DPA_{t-1}]$$

Hvor både a (justeringsfaktor) og b (målsatt utdelingsforhold) kan variere mellom 0 og 1.

Opsjonens kontantstrøm ved forfall (t=T)

Kjøpsopsjon

$$K_T = \max[0, (A_T - I)]$$

Salgsopsjon

$$S_T = \max[0, (I - A_T)]$$

Opsjon, aksje og risikofritt prosjekt

Aksjer, obligasjoner, og kjøps- og salgsopsjoner kan kombineres parvis slik at den blir gitt den samme kontantstrømmen på innløsningstidspunktet.

$$A_T + S_T = B_T + K_T$$

Salg-kjøp-paritet (SKP)

- Diskret tid

Vi har at investeringsutlegget på $t = 0$ er en kjøp av en aksje, kjøp av salgsopsjon, og salg av en kjøpsopsjon. Dette må tilsvare den neddiskonterte verdien av den risikofrie kontantstrømmen ved forfall

$$A_0 + S_0 - K_0 = \frac{I}{1 + r_f}$$

Omskrevet gir dette oss salg-kjøp-paritet (SKP)

$$K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$$

- Kontinuerlig forrentning

I opsjonssammenheng er det vanlig å operer med *kontinuerlig tid*. For eks. kan en tre-måneders periode deles inn i uendelige mange underperioder. Den kontinuerlige diskonteringsrenten vil da være gitt ved $e^{-i_f \cdot T}$

$$K_0 - S_0 = A_0 - Ie^{-i_f \cdot T}$$

Bestemmelse av sikringsverdi før forfall

$$\theta A_0 - mK_\theta = nA_0 - mK_n$$

Løser vi denne for m får vi *sikringsforholdet* (det antall kjøpsopsjoner som må skrives/selges pr. aksje for at porteføljen av aksjer og opsjoner skal være risikofri:

$$m = \frac{A_0(\theta - n)}{K_\theta - K_n}$$

Bestemmelse av opsjonsverdi før forfall

$$K_0 = \frac{1}{1 + r_f}[qK_\theta + (1 - q)K_n]$$

Hvor de to *sikringssannsynlighetene* (risikojusert sannsynligheter) for q og $1 - q$ er definert som

$$q = \frac{1 + r_f - n}{\theta - n} \text{ og } (1 - q) = \frac{\theta - 1 - r_f}{\theta - n}$$

Black-Scholes-modellen

$$K_0 = A_0 N(d_1) - Ie^{-i_f T} N(d_2)$$

- $N(d_1)$ har tolkning som antall kroner opsjonsverdien endrer seg med når aksjeprisen endres med en krone
- $N(d_2)$ har tolkning som sannsynligheten for at opsjonen er “in-the-money” ved forfall (dvs. $A_T \geq I$)

Vi har videre at

$$d_1 = \frac{ln(\frac{A_0}{I}) + i_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

mens sikringsforholdet er bestemt av $m = \frac{1}{N(d_1)}$