Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: ITF10705	**Emnenavn:** Diskret matematikk
Dato: 2. desember 2022	**Eksamenstid:** 09.00 – 13.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator er **ikke tillatt**.	**Faglærer:** Christian F. Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 8 sider inklusiv denne forsiden og tre sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 9 oppgaver. Hver oppgave teller like mye.
Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

Der det er mulig skal du:

- Vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.
- Begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.

Sensurfrist:

2. januar 2023

Oppgave 1

a) Konverter tallet $AE6_{16}$ til binærtall.

b) Gitt det komplekse tallet $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$. Hva er realdelen og imaginærdelen til z?

c) Skriv følgende komplekse tall på rektangulær form, altså på formen $a + bi$.

$$\frac{4-2i}{2+i}$$

Oppgave 2

Benytt sannhetstabeller til å undersøke om følgende to utsagn er logisk ekvivalente:

$$p \to (q \lor r) \qquad \text{og} \qquad (p \to q) \lor (p \to r)$$

Oppgave 3

Gitt to mengder, A og B, i et univers U. Gitt uttrykket

$$\Big((A \cap B) \cup \overline{(\overline{A} \cup B)}\Big) \cap A$$

Bruk lovene for operasjoner på mengder gitt i ett av vedleggene, til å forenkle uttrykket for å finne hvilket av følgende uttrykk det er likt. Angi hvilken lov du bruker i hvert trinn.

1. $A \cap B$
2. A
3. $A \cup \overline{B}$
4. $\overline{A} \cap B$
5. $\overline{B}$

OPPGAVE 4

Gitt følgende mengder:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 2, 2, 3, 4, 4, 1\}$
$C = \{1, 3\}$
$D = \{2, 3, 4\}$
$E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x \text{ er et partall.}\}$

a) Er mengdene A og B disjunkte? Begrunn svaret.

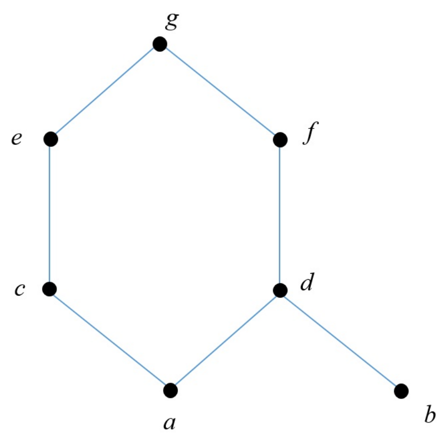
b) Skriv $A \cap D$ på listeform.

c) Er $(C \cup D) \subseteq A$? Begrunn svaret.

d) Er $C \subseteq (\mathbb{N} - E)$? Begrunn svaret.

OPPGAVE 5

En relasjon R på en mengde A er definert ved følgende hassediagram:



a) Angi mengden A på listeform.

b) Angi relasjonsmengden R på listeform.

OPPGAVE 6

Gitt mengdene $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Vi definerer nå en funksjon $f : A \to B$ ved følgende uttrykk:

$$f(x) = 2x + 1$$

a) Begrunn at f er en funksjon.

b) Er f injektiv? Begrunn svaret.

c) Er f surjektiv? Begrunn svaret.

d) Er f bijektiv? Begrunn svaret.

e) Er f inverterbar? Begrunn svaret.

OPPGAVE 7

Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Finn $A \cdot B$ dersom dette produktet eksisterer.

b) Finn $B \cdot A$ dersom dette produktet eksisterer.

c) Finn determinanten til A dersom denne eksisterer.

d) Finn determinanten til B dersom denne eksisterer.

e) Finn B^T.

OPPGAVE 8

Tegn tilstandsdiagrammet for en endelig automat (endelig tilstandsmaskin uten utgang) med inngangsalfabet $I = \{0, 1\}$ som gjenkjenner alle bitstrenger som starter med 10 og som inneholder bitstrengen 111.

OPPGAVE 9

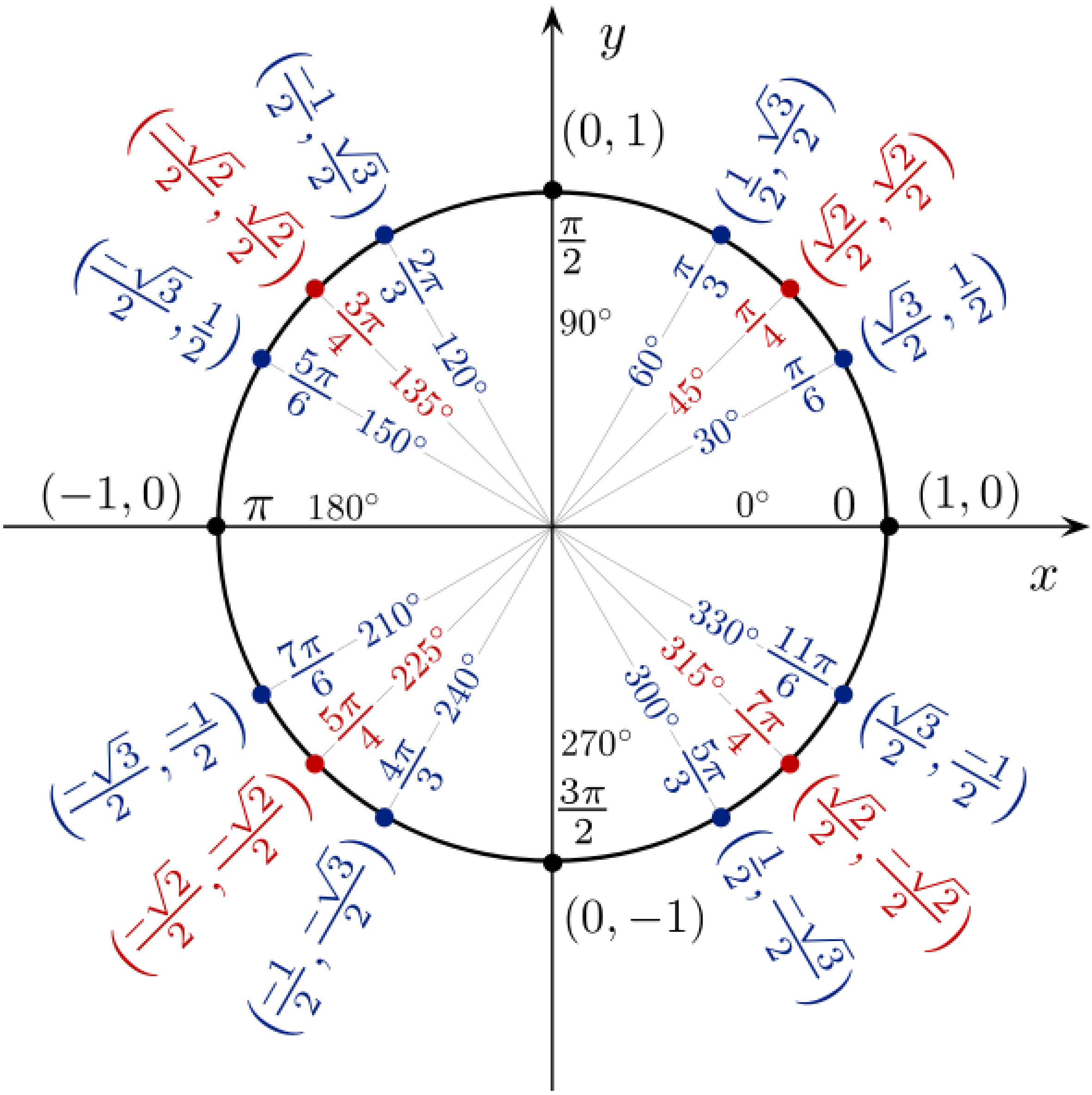
a) Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 4y_{n-1} - 5y_{n-2} = 0$$

b) Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 4y_{n-1} - 5y_{n-2} = 3 \cdot (-2)^n$$

Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



CFH, 11.09.14

Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

KOMBINATORIKK

	Ordnet utvalg	Uordnet utvalg
Med tilbakelegging	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Uten tilbakelegging	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$

DIFFERENSLIGNINGER

En annenordens, homogen, lineær differensligning med konstante koeffisienter kan løses ved hjelp av karakteristisk ligning. Vi har tre tilfeller:

Dersom karakteristisk ligning har to reelle røtter, λ_1 og λ_2, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

Dersom karakteristisk ligning har én reell rot, λ, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$$

Dersom karakteristisk ligning har to komplekse røtter, $\lambda_1 = re^{i\phi}$ og $\lambda_2 = re^{-i\phi}$, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = r^n(A\cos n\phi + B\sin n\phi)$$