Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
ITD27021	Lineær algebra og integraltransformer
Dato: 9. mai 2023	**Eksamenstid:** 09.00 – 13.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator som deles ut sammen med oppgaven.	**Faglærer:** Christian F. Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden og 3 sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 5 oppgaver. Hver oppgave teller like mye.
Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

Der det er mulig skal du:

- Vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.
- Begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.

Sensurfrist:

2. juni 2023

OPPGAVE 1

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne er rekkeekvivalent med følgende matrise (du skal ikke vise dette):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Forklar kortfattet hva det innebærer at disse matrisene er rekkeekvivalente.

b) Er B på redusert trappeform? Begrunn svaret.

c) Undersøk om

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en vektor i nullrommet til A.

d) Finn en basis for nullrommet til A.

e) Finn en basis for kolonnerommet til A.

f) Er vektoren $\boldsymbol{v}$ som ble gitt i spørsmål c, en vektor i kolonnerommet til A? Begrunn svaret.

g) Hva er dimensjonen til rekkerommet og dimensjonen det venstre nullrommet til A? Begrunn svaret.

OPPGAVE 2

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen har kun to egenverdier (du trenger ikke å vise dette): $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 2$.

Finn de tilhørende egenvektorsettene.

OPPGAVE 3

Et system av differensialligninger er gitt ved

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) \qquad\qquad + 2y_3(t) \\ y_2'(t) &= \qquad\qquad y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + 2y_2(t) + 3y_3(t) \end{aligned}$$

med følgende initialbetingelser: $y_1(0) = 0, y_2(0) = 4, y_3(0) = 1.$

Som hjelp i løsningen av dette ligningssystemet, får du oppgitt at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

har følgende egenverdier og tilhørende egenvektorsett:

$$\lambda_1 = -1, \quad r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \neq 0$$

$$\lambda_2 = 1, \quad s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s \neq 0$$

og

$$\lambda_3 = 5, \quad t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$

Løs systemet av differensialligninger. Skriv løsningen både på vektorform og på komponentform.

OPPGAVE 4

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn en singulærverdidekomponering av denne matrisen.

b) Benytt singulærverdidekomponeringen til å skrive A som en sum av rang 1-matriser.

OPPGAVE 5

a) Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' + y = 1, \qquad t \geq 0$$

med $y(0) = y'(0) = 0$.

b) En funksjon $r(t)$ er definert ved

$$r(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

i) Skriv denne funksjonen ved hjelp av enhetssprangfunksjoner.

ii) Finn laplacetransformen til $r(t)$ og vis på den måten at den er

$$R(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

c) Gitt følgende differensialligning

$$y'' + y = r(t), \qquad t \geq 0$$

med $y(0) = y'(0) = 0$, og $r(t)$ som gitt i spørsmål b. Merk at venstre side av ligningen og initialverdiene er som i spørsmål a.

Bruk laplacetransformasjonen til å løse dette initialverdiproblemet.

CFH, 22. mars 2022

Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen: $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s} Y$$

FOURIERTRANSFORMASJONEN

CFH, 12. april 2023

Fouriertransformasjonen - definisjon:

$$\mathscr{F}\left\{f(x)\right\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x} dx$$

Invers fouriertransformasjon - definisjon:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega x} d\omega$$

Noen egenskaper:

$$\mathscr{F}\left\{af(x)+bg(x)\right\} = a\mathscr{F}\left\{f(x)\right\} + b\mathscr{F}\left\{g(x)\right\}$$

$$\mathscr{F}\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$\mathscr{F}\left\{f(x-a)\right\} = e^{-ia\omega}F(\omega) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}\left\{e^{ia\omega}f(x)\right\} = F(\omega-a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}\left\{f(-x)\right\} = F(-\omega) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}\left\{f'(x)\right\} = i\omega\cdot F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left\{f''(x)\right\} = -\omega^2\cdot F(\omega)$$

$f(x)$	$F(\omega)$
$\begin{cases} b, & \lvert x\rvert < a \\ 0, & \lvert x\rvert > a \end{cases} \quad (a>0)$	$\frac{2b}{\omega}\sin(a\omega)$
$\begin{cases} e^{-ax}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (a>0)$	$\frac{1}{a+i\omega}$
$\begin{cases} xe^{-ax}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (a>0)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$
$e^{-a\lvert x\rvert} \quad (a>0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\delta(x)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$

LINEÆR ALGEBRA - NOEN NYTTIGE FORMLER

CFH, 2. mai 2023

Projeksjoner
Projeksjon av en vektor $\boldsymbol{b}$ ned på en linje med retningsvektor $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{a}$$

Projeksjon av en vektor $\boldsymbol{b}$ inn i et rom med basisvektorer satt som kolonner i matrise A:

$$\boldsymbol{p} = A(A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$$

Minste kvadraters metode

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$$

Gram-Schmidt
Et vektorrom med basisvektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$. Følgende tre vektorer vil stå ortogonalt på hverandre, og man kan lage en ortonormal basis for vektorrommet ved å normalisere disse:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{B}$$

Diagonalisering: $A = X \Lambda X^{-1}$

Singulærverdidekomponering: $A = U \Sigma V^T$

Pseudoinvers: $A^+ = V \Sigma^+ U^T$

Kovariansmatrisen: $S = \frac{1}{n-1} A A^T$