Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
ITD27021	Lineær algebra og integraltransformer
Dato:	**Eksamenstid:**
9. mai 2022	09.00 – 13.00
Hjelpemidler:	**Faglærer:**
To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator som deles ut sammen med oppgaven.	Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og 2 sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 4 oppgaver. Hver oppgave teller like mye.
Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

Der det er mulig skal du:

- Vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.
- Begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.

Sensurfrist:

30. mai 2022

OPPGAVE 1

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

og vektoren

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Løs ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Skriv løsningen på vektorform.

b) Finn en basis for hver av matrisens fire underrom, altså for rekkerommet, kolonnerommet, nullrommet og det venstre nullrommet.

OPPGAVE 2

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Regn ut $A^T A$ og vis på den måten at

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Du får nå opplyst følgende (dette trenger du ikke å vise):
Egenverdiene til matrisen $A^T A$ er 10 og 0, og de tilhørende egenvektorsettene er henholdsvis

$$s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s, t \neq 0)$$

b) Finn singulærverdidekomponeringen (SVD) til matrise A.

c) Finn matrisens pseudoinvers A^+.

d) Begrunn at $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ikke ligger i kolonnerommet til A.

e) Finn projeksjonen $\boldsymbol{p}$ av $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ inn i kolonnerommet.

OPPGAVE 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorsettene til A, og vis på den måten at egenvektorsettene kan skrives som

$$s\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad (s, t \neq 0)$$

Gitt følgende system av differensialligninger:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + 2y_2(t) \end{aligned}$$

Følgende initialbetingelser er gitt: $y_1(0) = 5, y_2(0) = 5$.

b) Løs dette ligningssystemet. Skriv løsningen både på vektorform og komponentform.

OPPGAVE 4

Gitt følgende initialverdiproblem:

$$y'' + 8y' + 15y = 3\delta(t), \qquad y(0) = 1, y'(0) = -4$$

a) Laplacetransformér differensialligningen, og vis på den måten at

$$Y(s) = \frac{s+7}{s^2 + 8s + 15}$$

hvor $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$.

b) Finn $y(t)$, altså løsningen av initialverdiproblemet.

CFH, 22. mars 2022

Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen: $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s}\, Y$$

FOURIERTRANSFORMASJONEN

CFH, 6. april 2022

Fouriertransformasjonen - definisjon:

$$\mathscr{F}(f(x)) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx$$

Invers fouriertransformasjon - definisjon:

$$\mathscr{F}^{-1}(F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega x} d\omega$$

Noen egenskaper:

$$\mathscr{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathscr{F}(f(x)) + b\mathscr{F}(g(x))$$

$$\mathscr{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\mathscr{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega} F(\omega) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}(e^{ia\omega} f(x)) = F(\omega - a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}(f(-x)) = F(-\omega) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{F}(f'(x)) = i\omega \cdot F(\omega)$$

$$\mathscr{F}(f''(x)) = -\omega^2 \cdot F(\omega)$$

$f(x)$	$F(\omega)$
$\begin{cases} b, & \lvert x\rvert < a \\ 0, & \lvert x\rvert > a \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{2b}{\omega} \sin(a\omega)$
$\begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a+i\omega}$
$\begin{cases} xe^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$
$e^{-a\lvert x\rvert} \quad (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\delta(x)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$