HØGSKOLEN I ØSTFOLD
INSTITUTT FOR INFORMASJONSTEKNOLOGI OG KOMMUNIKASJON

Kalkulus

Eksamen

17. februar 2022

Løsningsforslag

Christian F. Heide

February 17, 2022

OPPGAVE 1

Gitt to vektorer

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

a) *Finn vinkelen mellom $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$. Angi svaret i grader.*

For å finne vinkelen bruker vi skalarproduktet (prikkproduktet) som er definert som

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\theta$$

hvor θ er vinkelen mellom vektorene.

Her er

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -2 - 3 - 4 = -9$$

Lengdene av vektorene er

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

Vi finner da

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \frac{-9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = -0.5669$$

$$\theta = \arccos(-0.5669) = \underline{\underline{124.5^\circ}}$$

b) *Finn vektorproduktet* $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$((-3)\cdot 4 - (-1)\cdot 1)\boldsymbol{i} - (2\cdot 4 - (-1)\cdot(-1))\boldsymbol{j} + (2\cdot 1 - (-3)\cdot(-1))\boldsymbol{k} =$$

$$(-12+1)\boldsymbol{i} - (8-1)\boldsymbol{j} + (2-3)\boldsymbol{k} =$$

$$\underline{\underline{-11\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}}$$

OPPGAVE 2

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$y^2 - 2xy + 3x^2 = 3e^y$$

Finn ligningen til tangenten til kurven i punktet $(1,0)$.

Tangenten er en rett linje. Vi kan finne ligningen for en rett linje ved hjelp av ettpunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$ dersom vi kjenner stigningstallet, a, til linjen og et punkt, (x_0, y_0), på linjen.

Her vet vi at punktet $(1,0)$ ligger på linjen, altså at $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$.

Stigningstallet til tangenten er gitt ved den deriverte i dette punktet. For å finne den deriverte, foretar vi en implisitt derivasjon. Denne gir:

$$2yy' - (2y + 2xy') + 6x = 3e^y y'$$

Vi flytter alle ledd som inneholder y' over på venstre side, og resten over på høyre side:

$$2yy' - 2xy' - 3e^y y' = 2y - 6x$$

Vi trekker y' utenfor parentes:

$$(2y - 2x - 3e^y)y' = 2y - 6x$$

Så deler vi på uttrykket i parentesen, og får med det et uttrykk for den deriverte:

$$y' = \frac{2y - 6x}{2y - 2x - 3e^y}$$

Da kan vi finne stigningstallet til tangenten i punktet $(1, 0)$:

$$y'(1,0) = \frac{2 \cdot 0 - 6 \cdot 1}{2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 3e^0} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

Setter vi dette inn i ettpunktsformelen finner vi følgende ligning for tangenten:

$$y - 0 = \tfrac{6}{5}(x - 1)$$

$$\underline{\underline{y = \tfrac{6}{5}x - \tfrac{6}{5}}}$$

Oppgave 3

Gitt følgende funksjon:

$$f(x, y) = e^{2xy} + \cos(xy) + xy^2$$

Finn alle de partiellderiverte av første og annen orden til denne funksjonen.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$e^{2xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + y^2 =$$

$$\underline{\underline{2ye^{2xy} - y\sin(xy) + y^2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$e^{2xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) + 2xy =$$

$$\underline{\underline{2xe^{2xy} - x\sin(xy) + 2xy}}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

$$2ye^{2xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - y\cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + 0 =$$

$$\underline{\underline{4y^2 e^{2xy} - y^2 \cos(xy)}}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(2ye^{2xy} - y\sin(xy) + y^2) =$$

$$2e^{2xy} + 2ye^{2xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \sin(xy) - y\cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) + 2y =$$

$$\underline{\underline{2e^{2xy} + 4xye^{2xy} - \sin(xy) - xy\cos(xy) + 2y}} =$$

$$2(1 + 2xy)e^{2xy} - \sin(xy) - xy\cos(xy) + 2y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$2xe^{2xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - x\cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) + 2x =$$

$$\underline{\underline{4x^2 e^{2xy} - x^2 \cos(xy) + 2x}}$$

OPPGAVE 4

Benytt l'Hôpitals regel til å undersøke om følgende grenseverdi eksisterer, og i så fall bestemme hva den er:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2}$$

l'Hôpitals regel sier at et dersom en grenseverdiberegning gir et ubestemt uttrykk av typen $\frac{0}{0}$, kan vi derivere teller og nevner hver for seg uten at dette endrer grenseverdien.
Vi ser at dette uttrykket blir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=\frac{\sin 0(1-\cos 0)}{0^2}=\frac{0\cdot(1-1)}{0}=\frac{0}{0}$$

Vi kan derfor benytte l'Hôpitals regel, og får

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)+\sin x\cdot\sin x}{2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}{2x}=\frac{\cos 0-\cos^2 0+\sin^2 0}{2\cdot 0}=\frac{1-1+0}{0}=\frac{0}{0}$$

Vi får altså igjen et $\frac{0}{0}$-uttrykk, og kan bruke 'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}{2x}\overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2\cos x\cdot(-\sin x)+2\sin x\cdot\cos x}{2}=$$

$$\frac{-\sin 0-2\cos 0\cdot(-\sin 0)+2\sin 0\cdot\cos 0}{2}=$$

$$\frac{-0-2\cdot 0+2\cdot 0\cdot 1}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Vi har altså funnet at grenseverdien eksisterer, og at

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=0}}$$

Oppgave 5

Regn ut følgende integral:

$$\int\left(6x^2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$\int\left(6x^2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int 6x^2\,dx+\int\frac{2}{x}\,dx+\int\frac{4}{x^2}\,dx=$$

$$6\int x^2\ dx + 2\int \frac{1}{x}\ dx + 4\int \frac{1}{x^2}\ dx =$$

$$6\tfrac{1}{3}x^3 + 2\ln|x| + 4\tfrac{1}{-1}x^{-1} + C =$$

$$\underline{\underline{2x^3 + 2\ln|x| - 4x^{-1} + C}}$$

OPPGAVE 6

Regn ut følgende integral:

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6}\ dx$$

Her må vi forsøke en delbrøkoppspalting. Vi finner først røttene i nevneren:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{1-5}{2} = -2$$

Vi kan altså faktorisere nevneren slik: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.

Vi kan da delbrøkoppspalte slik:

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

Vi multipliserer begge sider med $(x-3)(x+2)$ og får

$$\frac{x}{x^2-x-6}(x-3)(x+2) = \frac{A}{x-3}(x-3)(x+2) + \frac{B}{x+2}(x-3)(x+2)$$

Vi forkorter det vi kan, og får

$$x = A(x+2) + B(x-3)$$

For å finne hva A og B må være, kan vi sette inn noen tall for x.

$x = 3$ gir

$$3 = A(3+2) + B(3-3)$$

$$A = \frac{3}{5}$$

$x = -2$ gir

$$-2 = A(-2+2) + B(-2-3)$$

$$B = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Vår delbrøkoppspalting av integranden blir følgelig

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{\frac{3}{5}}{x-3} + \frac{\frac{2}{5}}{x+2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x+2}$$

Da kan vi utføre integrasjonen:

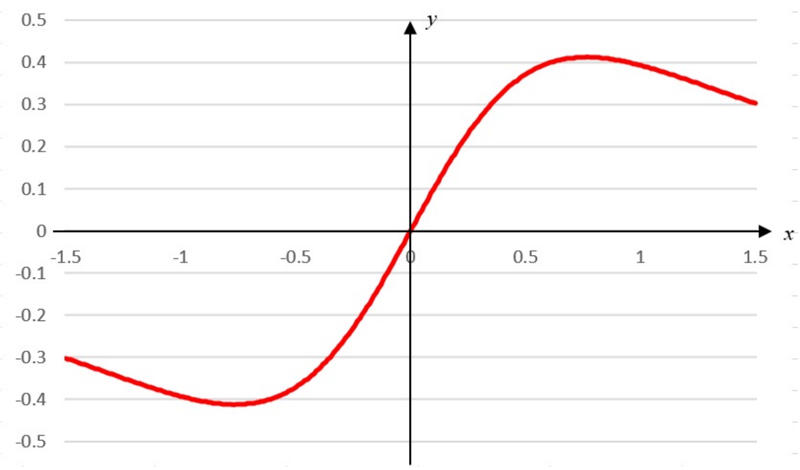
$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6}\,dx = \int \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$\underline{\underline{\tfrac{3}{5} \ln|x-3| + \tfrac{2}{5} \ln|x+2| + C}}$$

OPPGAVE 7

Figuren viser grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2}$$



Finn det eksakte arealet under under grafen mellom $x = 0$ *og* $x = 1$.
Tips: Bruk substitusjonen $u = \arctan x$.

Arealet er gitt ved

$$A = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

Substitusjonen $u = \arctan x$ gir

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

og altså

$$dx = (1+x^2)du$$

Bruker vi dette i integralet får vi

$$A = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{u}{1+x^2}(1+x^2)\, du =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} u\, du = \tfrac{1}{2}[u^2]_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{2}[\arctan^2 x]_0^1 =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\arctan^2 1 - \arctan^2 0\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} =$$

$$\underline{\underline{\frac{\pi^2}{32}}}$$

Oppgave 8

Finn den generelle løsningen av følgende differensialligning:

$$y' + 2xy = 2e^{-x^2}$$

Siden dette er en førsteordens lineær ligning, kan vi løse den ved å bruke metoden med integrerende faktor. Vi ser at ligningen allerede er på standard form, så vi trenger ikke å gjøre noe med den før vi går i gang.

Vi integrerer først koeffisienten foran y:

$$\int 2x\, dx = x^2$$

Vi eksponentierer dette og får da vår integrerende faktor:

$$e^{x^2}$$

Så multipliserer vi hele ligningen med den integrerende faktoren:

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 2e^{-x^2}e^{x^2}$$

Venstre side kan da forenkles til $(e^{2x}y)'$, mens vi ser at høyre side blir

$$2e^{-x^2}e^{x^2} = 2e^{-x^2+x^2} = 2e^0 = 2$$

Ligningen vår er altså blitt til

$$(e^{x^2}y)' = 2$$

Vi kan da integrere begge sider:

$$\int (e^{x^2}y)'\,dx = \int 2\,dx$$

som gir

$$e^{x^2}y = 2x + C$$

Så løser vi med hensyn på y ved å gange med e^{-x^2} (eller dele på e^{x^2}), og får

$$\underline{\underline{y = (2x + C)e^{-x^2}}}$$

OPPGAVE 9

Gitt følgende differensialligning:

$$y'' - y' - 20y = 80t - 16$$

Finn den generelle løsningen av denne.

Dette er en annenordens inhomogen ligning med konstante koeffisienter. Den kan løses ved å bruke metoden med karakteristisk ligning.

Vi løser først den tilhørende homogene ligningen, altså

$$y'' - y' - 20y = 0$$

Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$$

Vi løser denne:

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1} =$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{2 \pm 9}{2}$$

$$\lambda = \frac{1+9}{2} = 5 \quad \vee \quad \lambda = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vi får følgelig

$$\underline{y_h = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-4t}}$$

Så må vi finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Siden høyre side av ligningen er et førstegradspolynom, forsøker vi oss med et generelt førstegradspolynom:

$$y = K_1 t + K_0$$

Dette gir

$$y' = K_1$$

og

$$y'' = 0$$

Vi sette dette inn i den opprinnelige ligningen, og får

$$0 - K_1 - 20(K_1 t + K_0) = 80t - 16$$

Vi ganger ut parentesen og får

$$-K_1 - 20K_1 t - 20K_0 = 80t - 16$$

Ledd av samme grad på begge sider av likhetstegnet må være like:

$$-20K_1 = 80$$

$$K_1 = \frac{80}{-20} = -4$$

$$-K_1 - 20K_0 = -16$$

$$-20K_0 = -16 + K_1 = -16 - 4 = -20$$

$$K_0 = \frac{-20}{-20} = 1$$

En partikulær løsning er altså

$$\underline{y_p = -4t + 1}$$

Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er følgelig

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{5t} + C_2 e^{-4t} - 4t + 1}}$$

OPPGAVE 10

Gitt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2}{x^2 - 4} \qquad\qquad D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

a) *Finn hvor grafen til f skjærer x-aksen.*

Grafen skjærer x-aksen der $f(x) = 0$. En brøk er 0 der telleren er 0. Derfor har funksjonen følgende nullpunkter:

$$\begin{gathered} f(x) = 0 \\ 3x^3 + x^2 = 0 \\ x^2(3x+1) = 0 \\ x^2 = 0 \quad \vee \quad 3x + 1 = 0 \\[1em] \underline{\underline{x = 0 \quad \vee \quad x = -\tfrac{1}{3}}} \end{gathered}$$

b) *Finn eventuelle asymptoter for $f(x)$.*

i) Vertikale asymptoter kan vi ha der nevneren er 0:

$$\begin{gathered} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{gathered}$$

Vi sjekker at telleren ikke er 0 for disse x-verdiene:

$\underline{x = -2}$:

$$3 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 = 3 \cdot (-8) + 4 = -24 + 4 = -20$$

$\underline{x = 2}$:

$$3 \cdot 2^3 + 2^2 = 3 \cdot 8 + 4 = 24 + 4 = 28$$

Vi ser at telleren ikke blir 0 for noen av disse x-verdiene. Følgelig har funksjonen vertikale asymptoter for disse:

Funksjonen har vertikale asymptoter for $x = -2$ og $x = 2$.

ii) Horisontale asymptoter: Siden funksjonen er en polynombrøk hvor graden til telleren er en høyre enn graden til nevneren, vil den ikke ha horisontale asymptoter, men en skråasymptote.

iii) Skråasymptoten finner vi enklest ved å gjør en polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 + x^2) : (x^2 - 4) = 3x + 1 \\
\underline{-(3x^3 \qquad - 12x)} \\
\qquad\quad x^2 + 12x \\
\qquad \underline{-(x^2 \qquad - 4)} \\
\qquad\qquad\quad 12x + 4
\end{array}$$

Dette betyr at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2}{x^2 - 4} = 3x + 1 + \frac{12x + 4}{x^2 - 4}$$

Følgelig:

$f(x)$ har skråasymptoten $y = 3x + 1$.

c) *Er $f(x)$ symmetrisk om origo, om y-aksen eller ingen av delene?*

For å finne ut dette, må vi se på $f(-x)$. Dersom $f(-x) = -f(x)$ er funksjonen symmetrisk om origo (en odde funksjon), mens dersom $f(-x) = f(x)$ er funksjonen symmetrisk om y-aksen (en like funksjon).

Her er

$$f(-x) = \frac{3(-x)^3 + (-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{-3x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

Denne er hverken lik $f(x)$ eller $-f(x)$, så denne funksjonen er ingen av delene.