Høgskolen i Østfold

EKSAMEN – Ny og utsatt

Emnekode: ITD15020	**Emnenavn:** Kalkulus
Dato: 17. februar 2022	**Eksamenstid:** 16.00 – 20.00
Hjelpemidler: • To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. • Formelhefte. • Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	**Faglærer:** Christian F Heide
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett. Oppgavesettet består av 10 oppgaver. Ved sensuren teller hver oppgave like mye. Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad. Husk å vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.	
Sensurfrist: 10. mars 2022	

OPPGAVE 1

Gitt to vektorer

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

a) Finn vinkelen mellom $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$. Angi svaret i grader.

b) Finn vektorproduktet $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

OPPGAVE 2

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$y^2 - 2xy + 3x^2 = 3e^y$$

Finn ligningen til tangenten til kurven i punktet $(1,0)$.

OPPGAVE 3

Gitt følgende funksjon:

$$f(x,y) = e^{2xy} + \cos(xy) + xy^2$$

Finn alle de partiellderiverte av første og annen orden til denne funksjonen.

OPPGAVE 4

Benytt l'Hôpitals regel til å undersøke om følgende grenseverdi eksisterer, og i så fall bestemme hva den er:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2}$$

OPPGAVE 5

Regn ut følgende integral:

$$\int \left(6x^2 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$

OPPGAVE 6

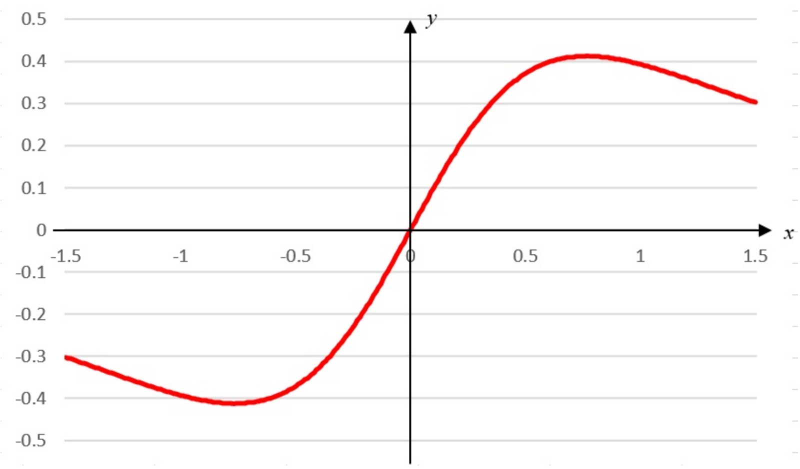
Regn ut følgende integral:

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6}\, dx$$

OPPGAVE 7

Figuren viser grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2}$$



Finn det eksakte arealet under under grafen mellom $x = 0$ og $x = 1$.
Tips: Bruk substitusjonen $u = \arctan x$.

OPPGAVE 8

Finn den generelle løsningen av følgende differensialligning:

$$y' + 2xy = 2e^{-x^2}$$

OPPGAVE 9

Gitt følgende differensialligning:

$$y'' - y' - 20y = 80t - 16$$

Finn den generelle løsningen av denne.

OPPGAVE 10

Gitt følgende funksjon:

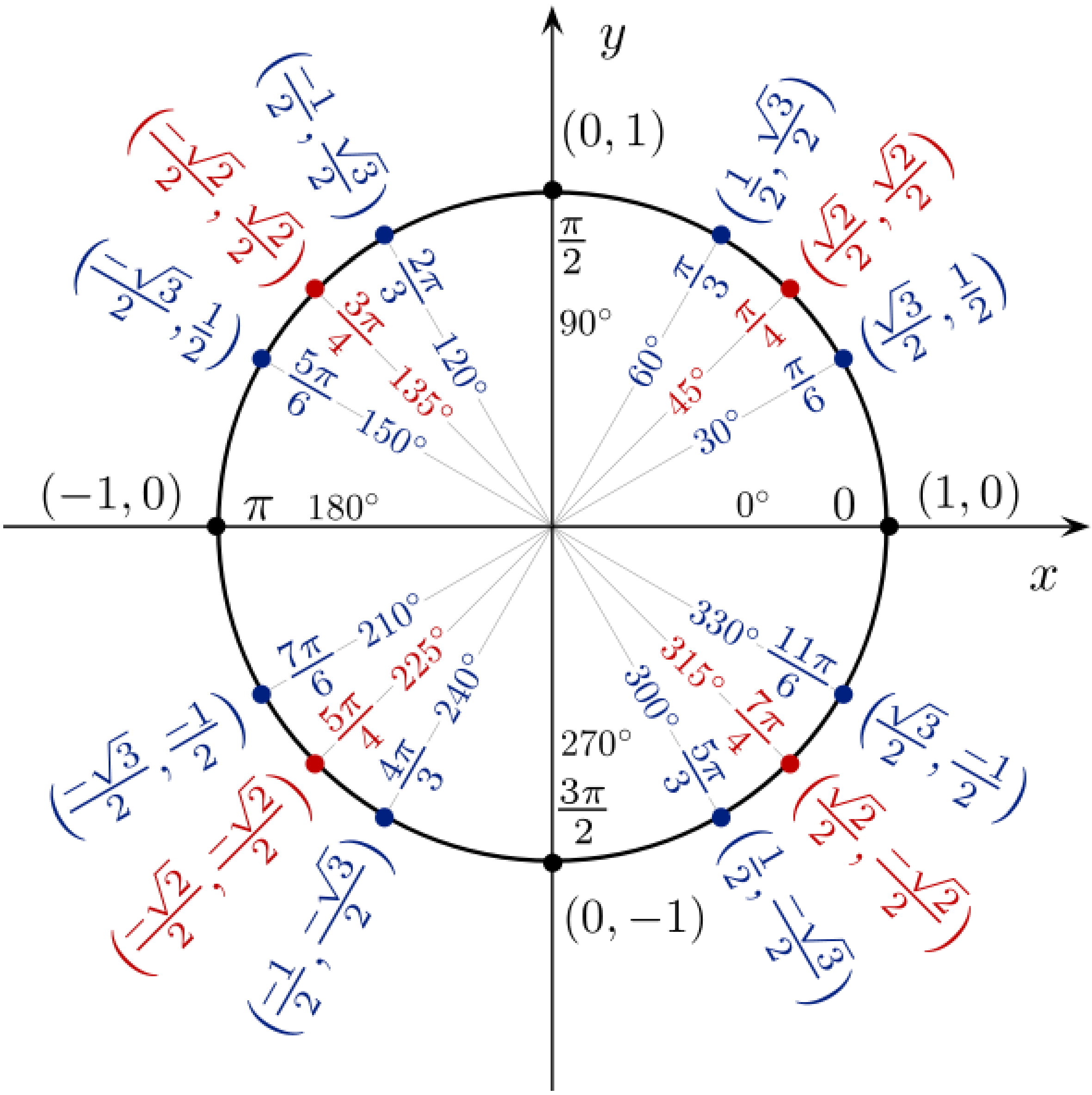
$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2}{x^2 - 4} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

a) Finn hvor grafen til f skjærer x-aksen.

b) Finn eventuelle asymptoter for $f(x)$.

c) Er $f(x)$ symmetrisk om origo, om y-aksen eller ingen av delene?

Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



Løsning av differensialligninger – en oppsummering

1. **Konstante koeffisienter foran *y*, *y*' og *y*'' (lineære ligninger).**
   a. Homogen ligning (høyre side er 0)
   - Løses ved hjelp av karakteristisk ligning. Vi får ett av tre tilfeller avhengig av løsningen av den karakteristiske ligningen:
     - To reelle løsninger, λ_1 og λ_2. Den generelle løsningen av diff.lign:
       $$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
     - Én reell løsning, λ. Den generelle løsningen av diff.lign:
       $$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$
     - To komplekse løsninger, $\lambda = \alpha \pm \beta i$. Den generelle løsningen:
       $$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

   b. Inhomogen ligning (høyre side er ikke 0)
   - Finn først løsningen av den tilhørende homogene ligningen, y_h. Denne løses som i punkt a.
   - Finn så en partikulær løsning y_p av den inhomogene ligningen ved å anta at y_p er av samme form som høyre side i ligningen (sjekk om den må oppgraderes). Sett inn den y_p du gjetter på i differensialligningen og finn på den måten de ubestemte konstantene i denne løsningen.
   - Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er gitt ved
     $$y = y_h + y_p$$

2. **Variable koeffisienter foran *y* og/eller *y*'.**
   a. Dersom ligningen kan separeres: Løses ved å separere, integrere og løse med hensyn på y.
   b. Dersom ligningen ikke kan separeres (men er lineær): Bring ligningen på standard form, altså en form der faktoren foran y' er 1. Formen skal altså være
   $$y' + p(t)y = r(t)$$
   Finn så den integrerende faktor $e^{\int p(t)dt}$ og gang hele ligningen med denne. Da kan du forenkle venstre side i ligningen og skrive den som den deriverte av et produkt, og kan derfor enkelt integrere den.

Ubestemte konstanter

Ubestemte konstanter i den generelle løsningen finnes helt til slutt ved hjelp av initialbetingelser/grensebetingelser.